ÜBER DIE DARSTELLUNG ENDLICHER ABELSCHER GRUPPEN DURCH KOLLINEATIONEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT VON DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER
FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

ROBERT FRUCHT
AUS BRÜNN

TAG DER PROMOTION: 7. 12. 1931

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 16. 1. 1930

DRUCK VON WALTER DE GRUYTER & CO. BERLIN / 1931

51

REFERENTEN: PROFESSOR DR. SCHUR

PROFESSOR DR. BIEBERBACH

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus Journal für die reine und angewandte Mathematik Band 166, 1931/32.

Über die Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen.

Von *Robert Frucht* in Triest.

Einleitung.

Aus der von Herrn I. Schur [1]) entwickelten Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen seien zunächst die für das Folgende wichtigsten Resultate angeführt (vgl. D., Einleitung):

Ordnet man den Elementen $A, B, \ldots$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g die g (nicht notwendig verschiedenen) f-reihigen Matrizen (A), $(B), \ldots$ mit nicht verschwindenden Determinanten zu, so bilden diese eine *Darstellung des Grades* f [2]) von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen, wenn für je zwei Elemente A, B der Gruppe eine Gleichung

$$(1) \qquad (A)\,(B) = r_{A,B}\,(AB)$$

besteht, wo $r_{A,B}$ eine Konstante bedeutet. *Äquivalenz* und *Irreduzibilität* [3]) von Darstellungen werden wie bei ganzen linearen Substitutionen [4]) definiert. *Assoziiert* heißen zwei Darstellungen durch Kollineationen mit den Matrizen $(A), (B), \ldots$ und $(A'), (B'), \ldots$, wenn es g Zahlen $a, b, \ldots$ gibt, so daß

$$(2) \qquad (A') = a(A), \qquad (B') = b(B), \ldots$$

wird. Da bei Kollineationen ein Zahlenfaktor keine Rolle spielt, sieht man zwei Darstellungen einer Gruppe durch Kollineationen nur dann als *wesentlich verschieden* an, wenn es keine zu der ersten assoziierte Darstellung gibt, die der zweiten äquivalent ist. Enthält eine endliche Gruppe $\mathfrak{R}$ eine aus invarianten Elementen von $\mathfrak{R}$ bestehende Untergruppe $\mathfrak{J}$ derart, daß die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{J}}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ einstufig isomorph ist, so liefert jede i. Dg. [5]) von $\mathfrak{R}$ durch g. l. S. [5]) eine i. Dg. von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen, indem man einem Element A aus $\mathfrak{G}$ diejenige Matrix (A) zuordnet, die irgendeinem Element aus der A beim Isomorphismus entsprechenden Nebengruppe $\mathfrak{J}A$ bei der Darstellung von $\mathfrak{R}$ zugeordnet ist. $\mathfrak{R}$ läßt sich dabei so wählen, daß man alle wesentlich verschiedenen i. Dgn. von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen erhält (eventuell einige mehrfach), wenn man alle i. Dgn. von $\mathfrak{R}$ durch g. l. S. betrachtet. Dann heißt $\mathfrak{R}$ eine *hinreichend ergänzte Gruppe* von $\mathfrak{G}$; und speziell, wenn die Ordnung von $\mathfrak{R}$ möglichst klein gewählt

---

[1]) Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, dieses Journal Bd. **127** (1904), S. 20—50; Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, dieses Journal Bd. **132** (1907), S. 85—137. *Diese Arbeiten werden mit* D. *bzw.* U. *zitiert.*

[2]) Ist $f = 1$, so sprechen wir von einer *trivialen Darstellung.*

[3]) Herr Schur gebracht für *irreduzibel* noch die ältere Bezeichnung *primitiv.*

[4]) Vgl. z. B. A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl., Berlin 1927. *Fortan mit* Sp. *zitiert.*

[5]) Fortan werden folgende *Abkürzungen* benutzt: i. Dg(n). = irreduzible Darstellung(en), g. l. S. = ganze lineare Substitutionen.

wird, eine *Darstellungsgruppe* von $\mathfrak{G}$; in diesem Falle nennt man die als abstrakte Gruppe eindeutig bestimmte Gruppe $\mathfrak{J}$ den *Multiplikator* von $\mathfrak{G}$ [6]). Eine hinreichend ergänzte Gruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine Darstellungsgruppe, wenn der Kommutator [7]) $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{H}$ alle Elemente von $\mathfrak{J}$ enthält. Eine Gruppe, deren Multiplikator die Ordnung 1 hat, heißt eine *abgeschlossene* Gruppe.

Für Abelsche Gruppen hat Herr Schur gezeigt (U., VIII):

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die Ordnungen der Elemente einer Basis der Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$, so ist der Multiplikator von $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt von $\binom{n}{2}$ zyklischen Gruppen der Ordnungen $(\varepsilon_1, \varepsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_3), \ldots, (\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$. Zyklische Gruppen sind abgeschlossen [8]).

In der vorliegenden Arbeit sollen nun für Abelsche Gruppen die Darstellungen durch Kollineationen und die Darstellungsgruppen untersucht werden. Als Hauptresultat wird sich eine genaue Bestimmung der Anzahl der voneinander wesentlich verschiedenen i. Dgn. einer Abelschen Gruppe durch Kollineationen ergeben. Für eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ weiß man nämlich nur folgendes: Bedeutet k die Anzahl von Klassen konjugierter Elemente in einer Darstellungsgruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, so gibt es genau k wesentlich verschiedene (d. h. nicht äquivalente) i. Dgn. von $\mathfrak{H}$ durch g. l. S., also höchstens ebensoviel [9]) verschiedene i. Dgn. von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen. Bezeichnet s die Anzahl der wesentlich verschiedenen i. Dgn. von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen, so kann man demnach nur

$$s \leqq k \tag{3}$$

behaupten. Bezeichnet ferner m die Ordnung des Multiplikators $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$, so ist

$$s \geqq m; \tag{4}$$

denn zwei i. Dgn. von $\mathfrak{H}$, die zu verschiedenen Charakteren der Untergruppe $\mathfrak{M}$ gehören, führen stets auf wesentlich verschiedene Kollineationen (D., § 1.)

Bei Abelschen Gruppen wird sich nun durch Aufstellung einer Darstellungsgruppe (§ 1) und Untersuchung ihrer i. Dgn. durch g. l. S. (§ 2) ergeben (§ 3): *Die Anzahl der wesentlich verschiedenen i. Dgn. einer Abelschen Gruppe durch Kollineationen ist genau gleich der Ordnung ihres Multiplikators* [10]).

Dabei wird außerdem bewiesen werden (§ 3): *Ist f der Grad einer i. Dg. der Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen, so geht das Quadrat von f in der Ordnung von $\mathfrak{A}$ auf* [11]).

Dann soll die Frage untersucht werden, welche Abelschen Gruppen eine *einstufig isomorphe* Darstellung als irreduzible Kollineationsgruppe zulassen; als notwendige und hinreichende Bedingung erweist sich, daß die Abelsche Gruppe als direktes Produkt zweier Abelscher Gruppen vom gleichen Typus geschrieben werden kann (§ 4). Ein rechnerisches Verfahren, um alle i. Dgn. einer Abelschen Gruppe durch Kollineationen

---

[6]) Auch der Kommutator jeder Darstellungsgruppe ist als abstrakte Gruppe allein durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt, während eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mehrere Darstellungsgruppen haben kann.

[7]) Wir bezeichnen den Kommutator einer Gruppe $\mathfrak{G}$ stets mit $\mathfrak{G}^*$.

[8]) Neuerdings hat Herr H. Weyl (Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig 1928, S. 148) die Frage nach den Darstellungen einer Abelschen Gruppe durch Kollineationen aufgeworfen, doch wird außer den zyklischen Gruppen nur die Vierergruppe als Beispiel behandelt.

[9]) Es kann nämlich bei zwei nicht äquivalenten i. Dgn. von $\mathfrak{H}$, wenn man sie als i. Dgn. von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen deutet, eine assoziierte der einen der anderen äquivalent sein, so daß beide als Kollineationen nicht wesentlich verschieden sind.

[10]) Bei allen anderen Gruppen ist hingegen $s > m$.

[11]) Für beliebige Gruppen stimmt das nicht, wie die Diedergruppen von nicht durch 4 teilbarer Ordnung zeigen, die eine i. Dg. vom Grade 2 besitzen; allgemein gilt nur, daß der Grad selber in der Ordnung der Gruppe aufgeht (D., § 4).

wirklich aufzustellen, wird in § 5 angegeben, dagegen die Anzahl der i. Dgn. eines bestimmten Grades nur für den Typus $(p, p, \ldots, p)$ bestimmt (§ 6).

In § 7 wird gezeigt, daß die Darstellungsgruppen einer Abelschen Gruppe, die metabelsche Gruppen sind (§ 1), auch noch metabelsche Darstellungsgruppen haben. In dem speziellen Fall, daß die Abelsche Gruppe direktes Produkt zweier zyklischer Gruppen (aber nicht selber zyklisch) ist, gibt es unter den Darstellungsgruppen auch abgeschlossene, die aber im wesentlichen schon von Herrn Schur als Beispiele abgeschlossener Gruppen angegeben worden sind.

§ 1. Die einfachste Darstellungsgruppe einer Abelschen Gruppe.

I. *Ist $\mathfrak{H}$ eine Darstellungsgruppe der Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$, so ist der Kommutator $\mathfrak{H}^*$ gleichzeitig der Multiplikator von $\mathfrak{A}$.*

Denn der Multiplikator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}$ enthält als invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ mit Abelscher Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{M}}$ den Kommutator $\mathfrak{H}^*$. Andererseits enthält bei einer beliebigen Gruppe der Kommutator $\mathfrak{H}^*$ einer Darstellungsgruppe den Multiplikator $\mathfrak{M}$ (Einl.).

Nennt man Gruppen mit Abelscher Kommutatorgruppe (wie üblich) *metabelsch*, so folgt aus I:

II. *Die Darstellungsgruppen Abelscher Gruppen sind metabelsche Gruppen.*

Eine hinreichend ergänzte Gruppe läßt sich nach folgendem auf beliebige Gruppen anwendbaren Verfahren bilden (U., S. 105, S. 106 Anm.): Die durch n Elemente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ der Ordnungen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{G}$ sei durch ein System [12])

$$f_\varkappa(A_1, A_2, \ldots, A_n) = E \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

von q Relationen zusammen mit den Ordnungsrelationen

$$A_\nu^{a_\nu} = E \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

völlig definiert; dann erhält man eine hinreichend ergänzte Gruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ durch folgende Festsetzungen: In $\mathfrak{K} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ sei

$$\mathrm{A}_\nu^{a_\nu} = \mathrm{E} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

ferner sollen die q Elemente $\mathrm{J}_\varkappa = f_\varkappa(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ invariante Elemente der Gruppe $\mathfrak{K}$ sein. Definiert man noch $\mathfrak{J} = \{\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \ldots, \mathrm{J}_q\}$, so ist $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{J}} \sim \mathfrak{G}$ [13]), und zwar entspricht dem Potenzprodukt $g(A_1, \ldots, A_n)$ in $\mathfrak{G}$ die Nebengruppe $\mathfrak{J} \cdot g(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$.

Um mit möglichst wenig erzeugenden Elementen auszukommen, schreibe man die zu betrachtende Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ als direktes Produkt von n zyklischen Gruppen, wo die Ordnung einer jeden durch die der folgenden teilbar ist [14]):

$$\mathfrak{A} = \{A_1\} \times \{A_2\} \times \cdots \times \{A_n\}, \tag{5}$$

$$A_\nu^{a_\nu} = E \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

$$a_\nu \mid a_{\nu-1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n). \tag{7}$$

Da $\mathfrak{A}$ durch (6) und durch die $\binom{n}{2}$ Vertauschbarkeitsbedingungen

---

[12]) Dabei bedeutet $f_\varkappa(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ein gewisses Produkt von positiven oder negativen Potenzen der erzeugenden Elemente A_ν.

[13]) Das Zeichen $\sim$ bedeutet hier und im folgenden *einstufig isomorph*.

[14]) Hierbei kann $n > 1$ vorausgesetzt werden, da zyklische Gruppen abgeschlossen sind. Die (durch die Gruppe $\mathfrak{A}$ eindeutig festgelegten) Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißen wie üblich die *Invarianten* der Abelschen Gruppe und $\mathfrak{A}$ vom *Typus* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

(8) $$A_\varkappa^{-1} A_\lambda^{-1} A_\varkappa A_\lambda = E \qquad (\varkappa < \lambda;\ \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert ist, erhält man eine hinreichend ergänzte Gruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{A}$ durch folgende Festsetzungen: In $\mathfrak{H} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sei

(9) $$A_\nu^{a_\nu} = E \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und die $\binom{n}{2}$ Elemente

(10) $$C_{\varkappa\lambda} = A_\varkappa^{-1} A_\lambda^{-1} A_\varkappa A_\lambda \qquad (\varkappa < \lambda;\ \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

die die Gruppe $\mathfrak{J}$ erzeugen, sollen invariante Elemente sein. Hier ist aber $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}^*$, und da $\mathfrak{J} < \mathfrak{H}^*$ das Kriterium dafür ist (Einl.), daß eine hinreichend ergänzte Gruppe Darstellungsgruppe ist, ist $\mathfrak{H}$ eine Darstellungsgruppe und nach I. $\mathfrak{H}^*$ der Multiplikator von $\mathfrak{A}$:

III. *Die durch* (9) *und* (10) *definierte Gruppe* $\mathfrak{H}$ *ist eine Darstellungsgruppe von* $\mathfrak{A}$, *die die „einfachste Darstellungsgruppe" heißen möge* [15]).

Erhebt man die aus (10) hervorgehende Gleichung $C_{\varkappa\lambda} A_\lambda^{-1} = A_\varkappa^{-1} A_\lambda^{-1} A_\varkappa$ in die a_λ-te Potenz, so ergibt sich wegen (9):

(11) $$C_{\varkappa\lambda}^{a_\lambda} = E.$$

Wir behaupten nun: $C_{\varkappa\lambda}$ ist von der genauen Ordnung a_λ, und zwischen $C_{12}, C_{13}, \ldots, C_{n-1,n}$ besteht sonst keine Relation. Zum Beweis greifen wir ein beliebiges festes Indexpaar $\varkappa < \lambda$ heraus und geben eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch g. l. S. an, bei der $C_{\varkappa\lambda}$ von der genauen Ordnung a_λ ist, alle übrigen $C_{\varrho\sigma}$ aber durch die Einheitsmatrix dargestellt werden. Eine solche Darstellung wird durch folgende monomiale Substitutionen in a_λ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{a_\lambda}$ geliefert, wo $\varepsilon_\varkappa$ eine primitive $a_\varkappa$-te Einheitswurzel bedeutet:

$$(A_\varkappa) = \begin{pmatrix} x_\varrho \\ -\left(1+\varrho\frac{a_\varkappa}{a_\lambda}\right) x_\varrho \\ \varepsilon_\varkappa \end{pmatrix} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, a_\lambda),$$

(12) $$(A_\lambda) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{a_\lambda - 1} & x_{a_\lambda} \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_{a_\lambda} & x_1 \end{pmatrix},$$

$(A_\mu) = (E)$, wenn μ ein von $\varkappa$ und λ verschiedener Index aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ ist.

Es wird dann

$$(C_{\varkappa\lambda}) = \varepsilon_\varkappa^{\frac{a_\varkappa}{a_\lambda}}(E)$$

tatsächlich invariantes Element von der genauen Ordnung a_λ und $(C_{\mu\nu}) = (E)$, wenn μ, ν von $\varkappa, \lambda$ verschieden ist.

Unser Ergebnis läßt sich auch so aussprechen (in Übereinstimmung mit U., VIII):

IV. *Der Multiplikator* $\mathfrak{H}^* = \{C_{12}\} \times \{C_{13}\} \times \{C_{23}\} \times \{C_{14}\} \times \cdots \times \{C_{n-1\,n}\}$ *ist vom Typus* $(a_2, a_3, a_3, a_4, a_4, a_4, \ldots, \underbrace{a_n, a_n, \ldots, a_n}_{(n-1)\text{-mal}})$.

Die Ordnung von $\mathfrak{H}^*$ *ist daher*

(13) $$h^* = a_2\, a_3^2\, a_4^3 \cdots a_n^{n-1},$$

diejenige von $\mathfrak{H}$

(14) $$h = a_1\, a_2^2\, a_3^3 \cdots a_n^n.$$

Beispiel: Die einfachste Darstellungsgruppe der Vierergruppe ($a_1 = a_2 = 2$) ist die Diedergruppe der Ordnung 8.

[15]) $\mathfrak{H}$ ist keineswegs die einzige Darstellungsgruppe von $\mathfrak{A}$ (vgl. § 7); es ist sogar möglich, daß man bei verschiedener Wahl der erzeugenden Elemente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in $\mathfrak{A}$ auf formal verschiedene „einfachste Darstellungsgruppen" geführt wird.

§ 2. Die Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch ganze lineare Substitutionen.

Man sagt von einer i. Dg. der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch g. l. S., sie *entspreche* dem Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$, wenn das Element C von $\mathfrak{H}^*$ durch $\psi(C) \cdot (E)$ dargestellt wird. Wir nennen eine solche i. Dg. auch kürzer eine Darstellung Γ_ψ; bezeichnen wir ihre Matrizen durch Klammern, so ist für je zwei Elemente A, B aus $\mathfrak{H}$:

$$(15) \qquad (A)(B)(A)^{-1}(B)^{-1} = \psi(ABA^{-1}B^{-1}) \cdot (E).$$

Bei festem A möge nun B alle Elemente von $\mathfrak{H}$ durchlaufen. Dann sind zwei Fälle möglich:

1. $\psi(ABA^{-1}B^{-1}) = 1$ oder $(A)(B)(A)^{-1}(B)^{-1} = (E)$ für alle B; dann ist (A) als eine mit allen Matrizen einer irreduziblen Substitutionsgruppe vertauschbare Matrix eine *Multiplikation*, d. h. von der Form $c \cdot (E)$ [16];

2. Es gibt ein Element B in $\mathfrak{H}$, so daß $\psi(ABA^{-1}B^{-1}) \neq 1$ oder $(A)(B)(A)^{-1}(B)^{-1} \neq (E)$ ist; dann ist (A) keine Multiplikation. In diesem Falle folgt durch rechtsseitige Multiplikation von (15) mit $(B)(A)(B)^{-1}$ und Übergang zu den Spuren, weil ähnliche Matrizen dieselbe Spur haben:

$$\chi(A) = \psi(ABA^{-1}B^{-1}) \cdot \chi(A) \quad \text{oder}$$

$$(16) \qquad \chi(A) = 0.$$

Da bei einem Element A zur Entscheidung, welcher der beiden Fälle vorliegt, gar nicht die Kenntnis von Γ_ψ, sondern nur die des Charakters $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$ erforderlich ist und da offenbar die Gesamtheit der Multiplikationen eine $\mathfrak{H}^*$ enthaltende invariante Untergruppe liefert, hat sich ergeben:

V. *Diejenigen Elemente* $A < \mathfrak{H}$, *die bei einer i. Dg.* Γ_ψ *durch eine Multiplikation dargestellt werden, bilden eine (nur durch* $\psi(C)$ *bestimmte, von der speziellen Wahl der i. Dg.* Γ_ψ *unabhängige) invariante Untergruppe* $\mathfrak{U}_\psi$. *Zu* $\mathfrak{U}_\psi$ *gehören diejenigen Elemente* A, *für die die Gleichung*

$$(17) \qquad \psi(AHA^{-1}H^{-1}) = 1$$

für alle H *erfüllt ist. Die (und nur die) Elemente* B, *die nicht in* $\mathfrak{U}_\psi$ *liegen, haben bei* Γ_ψ *den Charakter* $\chi(B) = 0$.

Daher ist, wenn unsere i. Dg. Γ_ψ den Grad f_ψ hat:

$$\chi(H)\,\overline{\chi}(H) = \begin{cases} f_\psi^2, & \text{wenn } H < \mathfrak{U}_\psi, \\ 0, & \text{wenn H nicht in } \mathfrak{U}_\psi, \end{cases}$$

und die Fundamentalformel (Sp., S. 169) $\sum\limits_H \chi(H)\,\overline{\chi}(H) = h$ lehrt, daß die Ordnung von $\mathfrak{U}_\psi$ gleich $\dfrac{h}{f_\psi^2}$ ist:

VI. *Der Grad* f_ψ *einer i. Dg.* Γ_ψ *ist gleich der Quadratwurzel aus dem Index von* $\mathfrak{U}_\psi$ *in bezug auf* $\mathfrak{H}$.

Für die Anzahl l_ψ der nicht äquivalenten i. Dgn. von $\mathfrak{H}$ durch g. l. S., die dem Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$ entsprechen, folgt daraus, da die Quadratsumme ihrer Grade nach einer Formel von Frobenius (D., Gleichung 21) gleich der Ordnung $\prod\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$ von $\mathfrak{A}$ sein muß:

$$(18) \qquad l_\psi f_\psi^2 = a_1 a_2 \cdots a_n .$$

Daraus ergibt sich wegen VI:

VII. *Die Anzahl* l_ψ *der nicht äquivalenten i. Dgn. von* $\mathfrak{H}$, *die dem Charakter* $\psi(C)$ *von* $\mathfrak{H}^*$ *entsprechen, ist gleich der Ordnung der Faktorgruppe* $\dfrac{\mathfrak{U}_\psi}{\mathfrak{H}^*}$.

[16]) Sp., Satz 149.

§ 3. Die Darstellungen von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen.

Eine Darstellung einer Gruppe durch Kollineationen heiße eine *getreue*, wenn bei ihr zwei verschiedene Elemente der Gruppe durch zwei verschiedene Kollineationen, d. h. durch Matrizen, die sich nicht nur durch einen Zahlenfaktor unterscheiden, dargestellt werden [17]). Bei einer getreuen Darstellung wird demnach nur das Einheitselement durch eine Multiplikation dargestellt.

Deuten wird jetzt eine i. Dg. Γ_ψ als i. Dg. von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen, so werden nach V. und VII. gerade die l_ψ Elemente von $\frac{\mathfrak{U}_\psi}{\mathfrak{H}^*}$ durch Multiplikationen dargestellt. Daraus ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

VIII. *Soll eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ eine getreue i. Dg. durch Kollineationen besitzen, so muß $\mathfrak{H}^*$ mindestens einen Charakter $\psi(C)$ besitzen, für den $\mathfrak{U}_\psi = \mathfrak{H}^*$, mithin $l_\psi = 1$ wird* [18]).

IX. *Eine dem Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$ entsprechende i. Dg. von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen ist eine getreue i. Dg. derjenigen Faktorgruppe von $\mathfrak{A}$, die beim Isomorphismus $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}^*} \sim \mathfrak{A}$ der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{U}_\psi}$ entspricht.*

Nach IX. sind alle l_ψ i. Dgn. von $\mathfrak{H}$ durch g. l. S., die einem Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$ entsprechen, getreue i. Dgn. der Abelschen Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{U}_\psi}$ durch Kollineationen; es gibt aber überhaupt *nur eine* solche getreue i. Dg. von $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{U}_\psi}$, wie man erkennt, wenn man VIII. nicht auf $\mathfrak{A}$, sondern auf $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{U}_\psi}$ anwendet. Damit ist gezeigt:

X. *Die l_ψ einem Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$ entsprechenden i. Dgn. von $\mathfrak{H}$ durch g. l. S. sind, als i. Dgn. von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen aufgefaßt, nicht wesentlich voneinander verschieden.*

Da zwei verschiedenen Charakteren des Multiplikators entsprechende i. Dgn. durch Kollineationen immer wesentlich verschieden sind (Einl.), so ist die Anzahl der verschiedenen i. Dgn. von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen gleich der Anzahl der Charaktere von $\mathfrak{H}^*$. Damit ist der schon in der Einleitung angeführte Hauptsatz bewiesen [19]):

XI. *Die Anzahl der wesentlich verschiedenen i. Dgn. einer Abelschen Gruppe durch Kollineationen ist genau gleich der Ordnung ihres Multiplikators* [20]).

Für den Grad einer solchen i. Dg. folgt aus (18):

XII. *Ist f der Grad einer i. Dg. der Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen, so geht f^2 in der Ordnung von $\mathfrak{A}$ auf. Der Grad der dem Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$ entprechenden i. Dg. von $\mathfrak{A}$ ist*

$$f_\psi = \sqrt{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{l_\psi}}. \tag{19}$$

---

[17] Diese Definition besagt, daß bei einer getreuen Darstellung zwischen abstrakter Gruppe und Kollineationsgruppe einstufiger Isomorphismus besteht.

[18]) Für welche Abelschen Gruppen das zutrifft, wird später (§ 4) untersucht werden.

[19]) Der Beweis wurde nur für $n \geqq 2$ geführt, doch gilt der Satz auch für zyklische Gruppen, da diese nur eine triviale Darstellung zulassen.

[20]) Die Abelschen Gruppen sind die einzigen, bei denen diese Anzahl s gleich der Ordnung des Multiplikators ist; bei allen anderen Gruppen ist $s > m$. Denn dem Hauptcharakter $\psi(M) = 1$ des Multiplikators einer nicht Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ entsprechen alle diejenigen i. Dgn. einer Darstellungsgruppe, die gleichzeitig i. Dgn. von $\mathfrak{G}$ durch g. l. S. sind. Darunter kommt neben der trivialen Darstellung auch eine i.Dg. von höherem als dem ersten

Speziell für den Grad einer getreuen i. Dg. von $\mathfrak{A}$, die nach VIII. durch $l_\psi = 1$ charakterisiert ist, ergibt sich

$$f = \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{20}$$

Daraus folgt: *Ist eine irreduzible Kollineationsgruppe vom Grade f Abelsch, so ist sie von der Ordnung f^2.*

§ 4. Berechnung von l_ψ. Die Bedingungen für die Existenz getreuer Darstellungen.

Für den Kommutator zweier Elemente aus $\mathfrak{H}$ gilt, wie man durch Ausrechnen bestätigt (oder U., S. 115 entnehmen kann):

$$(A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n})(A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \cdots A_n^{\beta_n})(A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n})^{-1}(A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \cdots A_n^{\beta_n})^{-1} = \prod_{\varkappa<\lambda} C_{\varkappa\lambda}^{\begin{vmatrix}\alpha_\varkappa & \alpha_\lambda \\ \beta_\varkappa & \beta_\lambda\end{vmatrix}}. \tag{21}$$

Nach V. und VII. ist nun l_ψ wegen (22) $\mathfrak{H} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \mathfrak{H}^* A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n}$ gleich der Anzahl der Elemente von der Form $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n}$, für die

$$\psi((A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n}) H (A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n})^{-1} H^{-1}) = 1$$

für alle H oder wegen (21)

$$\prod_{\varkappa<\lambda} \psi(C_{\varkappa\lambda})^{\alpha_\varkappa\beta_\lambda - \alpha_\lambda\beta_\varkappa} = 1 \tag{23}$$

für alle Werte der β_ν erfüllt ist.

Da $C_{\varkappa\lambda}$ von der Ordnung a_λ ist (§ 1), erhält man wegen (7) einen Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$, wenn man eine primitive a_2-te Einheitswurzel ε bestimmt und

$$\psi(C_{\varkappa\lambda}) = \varepsilon^{\frac{a_2}{a_\lambda} s_{\varkappa\lambda}} \qquad (\varkappa < \lambda;\ \varkappa, \lambda = 1,2,\ldots,n) \tag{24}$$

setzt [21]). Dann geht (23) über in $\prod_{\varkappa<\lambda} \varepsilon^{\frac{a_2}{a_\lambda} s_{\varkappa\lambda}(\alpha_\varkappa\beta_\lambda - \alpha_\lambda\beta_\varkappa)} = 1$ oder

$$\sum_{\varkappa<\lambda} \frac{a_2}{a_\lambda} s_{\varkappa\lambda}(\alpha_\varkappa \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\varkappa) \equiv 0 \pmod{a_2}. \tag{25}$$

Indem man die linke Seite in zwei Summen zerlegt und in der zweiten die Summationsbuchstaben vertauscht, ergibt sich

$$\sum_{\varkappa<\lambda} \frac{a_2}{a_\lambda} s_{\varkappa\lambda} \alpha_\varkappa \beta_\lambda - \sum_{\varkappa>\lambda} \frac{a_2}{a_\varkappa} s_{\lambda\varkappa} \alpha_\varkappa \beta_\lambda \equiv 0 \pmod{a_2},$$

oder wenn für $\varkappa \geqq \lambda$

$$s_{\varkappa\lambda} = -s_{\lambda\varkappa} \tag{26}$$

definiert wird:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{a_2 s_{\varkappa\lambda}}{(a_\varkappa, a_\lambda)} \alpha_\varkappa \beta_\lambda \equiv 0 \pmod{a_2}. \tag{27}$$

Nun war l_ψ die Anzahl derjenigen $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n}$, für die (23) bei allen Werten der β_ν erfüllt ist. Also ist zu verlangen, daß die Kongruenz (27) für alle Werte von $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ gilt oder daß die n Kongruenzen

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{a_2 s_{\varkappa\nu}}{(a_\varkappa, a_\nu)} \alpha_\varkappa \equiv 0 \pmod{a_2} \tag{28}$$

Grade vor, und diese ist, auch als Kollineation aufgefaßt, von der trivialen wesentlich verschieden. Daher gehören schon zum Hauptcharakter mindestens zwei wesentlich verschiedene i. Dgn. von $\mathfrak{G}$ durch Kollineationen, also ist $s > m$.

[21]) Man erhält alle Charaktere von $\mathfrak{H}^*$, wenn jede der Größen $s_{\varkappa\lambda}$ ein vollständiges Restsystem mod. a_λ durchläuft.

erfüllt sind: l_ν ist gleich der Anzahl der simultanen Lösungen der n Kongruenzen (28) für die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, wobei α_ν aus einem vollständigen Restsystem mod. a_ν zu nehmen ist. Die Koeffizientenmatrix von (28), die

$$A = \left(\frac{a_2 s_{\lambda\varkappa}}{(a_\varkappa, a_\lambda)}\right) \tag{29}$$

heißen möge, ist wegen (26) schiefsymmetrisch (alternierend) und möge die Elementarteiler $e_1, e_2, \ldots, e_n$ haben; d. h. es gibt zwei Matrizen U und V mit der Determinante ± 1, so daß

$$UAV = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & e_2 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots e_n \end{pmatrix} \tag{30}$$

wird, wobei

$$e_\mu \mid e_{\mu+1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{31}$$

ist. Da A schiefsymmetrisch ist, ist [22])

$$e_1 = e_2, \quad e_3 = e_4, \ldots, \tag{32}$$

und falls n ungerade ist, $e_n = 0$.

Bezeichnet man die Zahlenreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ kurz mit α, so kann man die Kongruenzen (28) kürzer schreiben in der Form:

$$A(\alpha) \equiv 0 \pmod{a_2}. \tag{28a}$$

Führt man durch die unimodulare Substitution

$$\alpha = V(\xi), \quad \xi = V^{-1}(\alpha) \tag{33}$$

eine neue Zahlenreihe $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ein, so bekommt man für die ξ_ν die Kongruenzen $AV(\xi) \equiv 0 \pmod{a_2}$ oder damit gleichbedeutend $UAV(\xi) \equiv 0 \pmod{a_2}$, d. h. wegen (30):

$$e_\nu \xi_\nu \equiv 0 \pmod{a_2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{34}$$

Die allgemeine Lösung dieser Kongruenzen ist

$$\xi_\nu = \frac{a_2}{(a_2, e_\nu)} t_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

wo die Parameter $t_1, t_2, \ldots, t_n$ alle ganzen Zahlen durchlaufen sollen, also nach (33) die von (28a):

$$\alpha_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} v_{\mu\nu} t_\nu \frac{a_2}{(a_2, e_\nu)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n), \tag{36}$$

wo die $v_{\varkappa\lambda}$ die Elemente der Matrix V bedeuten. Oder anders ausgedrückt unter Einführung von n Symbolen $x_1, x_2, \ldots, x_n$: Die Lösungen von (28a) bilden einen n-gliedrigen Modul $\mathfrak{m}$ von Linearformen $\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu x_\mu$, der als Basis die n Formen

$$\sum_{\mu=1}^{n} v_{\mu\nu} \frac{a_2}{(a_2, e_\nu)} x_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

hat mit der Koeffizientenmatrix

---

[22]) Siehe Frobenius, Theorie der linearen Formen mit ganzen Coeffizienten, dieses Journal Bd. 86 (1879), S. 167.

$$(37)\qquad M = \left(v_{\lambda\varkappa}\frac{a_2}{(a_2, e_\varkappa)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{(a_2,e_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{(a_2,e_2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_2}{(a_2,e_n)} \end{pmatrix} \cdot V' .$$

Als Anzahl der Lösungen von (28a), wenn $\alpha_\nu \pmod{a_\nu}$ reduziert wird ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), ist daher l_ψ gleich der Anzahl der Restklassen, in die der Modul $\mathfrak{m}$ zerfällt nach demjenigen n-gliedrigen Teilmodul $\mathfrak{a}$, der als Basis die n Linearformen

$$(38)\qquad a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n$$

hat, also gleich dem absoluten Betrag des Quotienten aus den Determinanten der Koeffizientenmatrizen von (38) und (37):

$$l_\psi = \pm\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{|M|}$$

oder wegen $|V| = \pm 1$

$$(39)\qquad l_\psi = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \cdot \prod_{\nu=1}^{n}(a_2, e_\nu)}{a_2^n}.$$

Für den Grad f_ψ einer dem Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$ entsprechenden i. Dg. folgt daraus nach (19) und (32)

$$(40)\qquad f_\psi = \frac{a_2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(a_2, e_2)\,(a_2, e_4)\,(a_2, e_6)\cdots(a_2, e_{2\left[\frac{n}{2}\right]})}.$$

Jetzt läßt sich auch die Frage beantworten, wann eine Abelsche Gruppe getreue i. Dgn. durch Kollineationen besitzt. Dazu ist nach VIII. notwendig und hinreichend die Existenz eines Charakters $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$, für den $l_\psi = 1$, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$ wird. Dann muß die Matrix M in (37) dieselben Elementarteiler haben wie die Matrix $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ von (38). So erhalten wir die Bedingungen: $\frac{a_2}{(a_2, e_\nu)} = a_\nu$ oder

$$(41)\qquad (a_2, e_\nu) = \frac{a_2}{a_\nu} \qquad (\nu = 1,2, \ldots, n).$$

Im Falle eines ungeraden n führt die n-te dieser Bedingungen wegen $e_n = 0$ auf den Widerspruch $a_n = 1$. Infolgedessen muß n gerade sein. Weiter ergibt sich aus (41) wegen (32) als notwendige Bedingung für die Existenz getreuer i. Dgn. bei geradem n:

$$(42)\qquad a_1 = a_2,\ a_3 = a_4, \ldots, a_{n-1} = a_n .$$

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend; denn wählt man speziell als Charakter $\psi(C)$ von $\mathfrak{H}^*$ denjenigen, bei dem

$$(43)\qquad s_{12} = s_{34} = \cdots = s_{n-1,n} = 1,\ s_{21} = s_{43} = \cdots = s_{n,n-1} = -1$$

ist und alle übrigen $s_{\varrho\sigma} = 0$ sind, so wird tatsächlich $l_\psi = 1$. Damit ist gezeigt:

XIII. *Dafür, daß die Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ getreue i. Dgn. durch Kollineationen besitzt* (*oder: daß $\mathfrak{A}$ einer irreduziblen Kollineationsgruppe einstufig isomorph ist*), *ist not-*

wendig und hinreichend, daß n gerade und $a_1 = a_2, a_3 = a_4, \ldots, a_{n-1} = a_n$ *ist, d. h. daß* $\mathfrak{A}$ *als direktes Produkt zweier Abelscher Gruppen von gleichem Typus geschrieben werden kann.*

§ 5. Ein Verfahren zur Bestimmung aller Darstellungen.

Es sei zunächst $\mathfrak{A}$ eine Abelsche Gruppe mit geradem n und paarweise gleichen Invarianten:

$$a_1 = a_2, \quad a_3 = a_4, \ldots, a_{n-1} = a_n . \tag{42}$$

Der bisher mit $\psi(C)$ bezeichnete, durch (24) gegebene Charakter von $\mathfrak{H}^*$ heiße jetzt genauer $\psi_{C_{12}^{s_{12}} C_{13}^{s_{13}} \cdots C_{n-1,n}^{s_{n-1,n}}}(C)$. [23]) Das Wesentliche an der neuen Bezeichnung ist, daß die Charaktere bei der Komposition eine zu $\mathfrak{H}^*$ isomorphe Gruppe bilden, z. B. ist

$$\psi_{C_{12}}(C) \cdot \psi_{C_{34}}(C) \cdot \psi_{C_{56}}(C) \cdots \psi_{C_{n-1,n}}(C) = \psi_{C_{12} C_{34} C_{56} \cdots C_{n-1,n}}(C) . \tag{44}$$

Bereits in § 1 haben wir in (12) eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch g. l. S. des Grades a_λ kennen gelernt. Setzt man für die dortige primitive $a_\varkappa$-te Einheitswurzel: $\varepsilon_\varkappa = \varepsilon^{\frac{a_2}{a_\varkappa} c_\lambda}$ mit $(c_\lambda, a_\varkappa) = 1$, wo ε unsere primitive a_2-te Einheitswurzel bedeutet, so entspricht diese Darstellung, die $\Gamma_{\varkappa\lambda}^{(c_\lambda)}$ heißen möge, dem Charakter $\psi_{C_{\varkappa\lambda}^{c_\lambda}}(C)$ von $\mathfrak{H}^*$. Man bilde nun die durch *Komposition* [24]) aus $\Gamma_{12}^{(1)}, \Gamma_{34}^{(1)}, \ldots, \Gamma_{n-1,n}^{(1)}$ entstehende Darstellung $\Gamma_{12}^{(1)} \times \Gamma_{34}^{(1)} \times \cdots \times \Gamma_{n-1,n}^{(1)}$; sie ist vom Grade $f = a_2 a_4 a_6 \cdots a_n$ und entspricht nach (44) dem Charakter $\psi_{C_{12} C_{34} \cdots C_{n-1,n}}(C)$ von $\mathfrak{H}^*$. Sie ist irreduzibel; denn wäre sie reduzibel, so würde ein irreduzibler Bestandteil einen Grad haben, der kleiner ist als $a_2 a_4 a_6 \cdots a_n$, was nicht geht, da hier wegen $l_\psi = 1$ der Grad einer i. Dg. nach (20) genau $a_2 a_4 a_6 \cdots a_n$ sein muß. Entsprechend erhält man in $\Gamma_{12}^{(c_2)} \times \Gamma_{34}^{(c_4)} \times \cdots \times \Gamma_{n-1,n}^{(c_n)}$ eine getreue i. Dg., die dem Charakter $\psi_{C_{12}^{c_2} C_{34}^{c_4} \cdots C_{n-1,n}^{c_n}}(C)$ entspricht, wenn für $\nu = 2, 4, \ldots, n$

$$(c_\nu, a_\nu) = 1 \text{ ist.} \tag{45}$$

Auf diesen Fall läßt sich aber der Fall eines beliebigen Charakters $\psi_{C_{12}^{s_{12}} C_{13}^{s_{13}} \cdots C_{1n}^{s_{1n}} C_{23}^{s_{23}} \cdots C_{n-1,n}^{s_{n-1,n}}}(C)$ von $\mathfrak{H}^*$, für den $l_\psi = 1$ ist, durch einen geeigneten Automorphismus von $\mathfrak{H}$ zurückführen und dadurch die Aufgabe lösen, *alle* getreuen i. Dgn. von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen anzugeben. Sind nämlich $e_1 = e_2, e_3 = e_4, \ldots, e_{n-1} = e_n$ die wegen $l_\psi = 1$ den Bedingungen (41) $(a_2, e_\nu) = \frac{a_2}{a_\nu}$ genügenden Elementarteiler der Matrix (29) $A = \left(\frac{a_2 s_{\lambda\varkappa}}{(a_\varkappa, a_\lambda)}\right)$, so gibt es nach einem Satz von Frobenius [25]) eine Matrix $\Omega = (\omega_{\varkappa\lambda})$ mit $|\Omega| = 1$, so daß

$$A = \Omega' \cdot \begin{pmatrix} 0 & e_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -e_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & \cdots & & \\ 0 & 0 & -e_4 & 0 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & e_n & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -e_n & 0 & \end{pmatrix} \cdot \Omega \tag{46}$$

[23]) Der durch (43) definierte Charakter z. B. wäre jetzt als $\psi_{C_{12} C_{34} C_{56} \cdots C_{n-1\,n}}(C)$ zu bezeichnen.

[24]) Siehe z. B. Sp., § 53.

[25]) Siehe Frobenius, a. a. O., S. 167 f.

oder

$$(47)\qquad \frac{a_2\, s_{\varkappa\lambda}}{(a_\varkappa, a_\lambda)} = -e_2\begin{vmatrix}\omega_{1\varkappa} & \omega_{1\lambda}\\ \omega_{2\varkappa} & \omega_{2\lambda}\end{vmatrix} - e_4\begin{vmatrix}\omega_{3\varkappa} & \omega_{3\lambda}\\ \omega_{4\varkappa} & \omega_{4\lambda}\end{vmatrix} - \cdots - e_n\begin{vmatrix}\omega_{n-1,\varkappa} & \omega_{n-1,\lambda}\\ \omega_{n\varkappa} & \omega_{n\lambda}\end{vmatrix}$$
$$(\varkappa, \lambda = 1,2, \ldots, n)$$

wird. Wir betrachten den durch

$$(48)\qquad A_\nu = \bar{A}_1^{\omega_{1\nu}}\bar{A}_2^{\omega_{2\nu}}\cdots\bar{A}_n^{\omega_{n\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Automorphismus [26]) von $\mathfrak{H}$ und in den transformierten Elementen den Charakter $\psi_{\bar{C}_{12}^{c_2}\bar{C}_{34}^{c_4}\cdots\bar{C}_{n-1\,n}^{c_n}}(C)$ von $\mathfrak{H}^*$, wo $\bar{C}_{\varkappa\lambda} = \bar{A}_\varkappa^{-1}\bar{A}_\lambda^{-1}\bar{A}_\varkappa\bar{A}_\lambda$ $(\varkappa < \lambda)$ und

$$(49)\qquad c_\nu = -\frac{e_\nu}{(a_2, e_\nu)} = -\frac{e_\nu a_\nu}{a_2} \qquad (\nu = 2, 4, \ldots, n)$$

gesetzt ist, und wegen (41) die Bedingungen (45) erfüllt sind. Nach (21) wird:

$$(50)\qquad C_{\varkappa\lambda} = \prod_{\varrho<\sigma}\bar{C}_{\varrho\sigma}^{\begin{vmatrix}\omega_{\varrho\varkappa} & \omega_{\varrho\lambda}\\ \omega_{\sigma\varkappa} & \omega_{\sigma\lambda}\end{vmatrix}} \qquad (\varkappa < \lambda;\ \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n),$$

$$\psi_{\bar{C}_{12}^{c_2}\bar{C}_{34}^{c_4}\cdots\bar{C}_{n-1,n}^{c_n}}(C_{\varkappa\lambda}) = \prod_{\varrho<\sigma}\psi_{\bar{C}_{12}^{c_2}\bar{C}_{34}^{c_4}\cdots\bar{C}_{n-1,n}^{c_n}}(\bar{C}_{\varrho\sigma})^{\begin{vmatrix}\omega_{\varrho\varkappa} & \omega_{\varrho\lambda}\\ \omega_{\sigma\varkappa} & \omega_{\sigma\lambda}\end{vmatrix}},$$

und wenn man (49) und die Definition von $\psi_{\bar{C}_{12}^{c_2}\bar{C}_{34}^{c_4}\cdots\bar{C}_{n-1.n}^{c_n}}(\bar{C})$ berücksichtigt, die für die Elemente $\bar{C}_{12}, \bar{C}_{34}, \ldots$ die Charaktere $\varepsilon^{c_2} = \varepsilon^{-e_2}$, $\varepsilon^{\frac{a_2}{a_4}c_4} = \varepsilon^{-e_4}, \ldots$, für $\bar{C}_{13}, \bar{C}_{14}, \ldots$ aber 1 als Charakter liefert,

$$\psi_{\bar{C}_{12}^{c_2}\bar{C}_{34}^{c_4}\cdots\bar{C}_{n-1.n}^{c_n}}(C_{\varkappa\lambda}) = \varepsilon^{-e_2\begin{vmatrix}\omega_{1\varkappa} & \omega_{1\lambda}\\ \omega_{2\varkappa} & \omega_{2\lambda}\end{vmatrix} - e_4\begin{vmatrix}\omega_{3\varkappa} & \omega_{3\lambda}\\ \omega_{4\varkappa} & \omega_{4\lambda}\end{vmatrix} - \cdots - e_n\begin{vmatrix}\omega_{n-1,\varkappa} & \omega_{n-1,\lambda}\\ \omega_{n\varkappa} & \omega_{n\lambda}\end{vmatrix}} = \varepsilon^{\frac{a_2}{a_\lambda}s_{\varkappa\lambda}}$$

für $\varkappa < \lambda$ nach (47), folglich

$$(51)\qquad \psi_{C_{12}^{s_{12}}C_{13}^{s_{13}}\cdots C_{n-1,n}^{s_{n-1,n}}}(C_{\varkappa\lambda}) = \psi_{\bar{C}_{12}^{c_2}\bar{C}_{34}^{c_4}\cdots\bar{C}_{n-1.n}^{c_n}}(C_{\varkappa\lambda}).$$

Durch den Automorphismus erscheint also jeder Charakter mit $l_\psi = 1$ auf den bereits behandelten Spezialfall zurückgeführt und damit das Problem, alle getreuen i. Dgn. von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen aufzustellen, gelöst.

Ist jetzt $\mathfrak{A}$ wieder eine beliebige Abelsche Gruppe, so ist nach IX. eine i. Dg. von von $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen getreue i. Dg. einer Faktorgruppe von $\mathfrak{A}$, die nach XIII. paarweise gleiche Invarianten aufweisen muß. Da soeben ein Verfahren angegeben wurde, alle getreuen i. Dgn. einer solchen Abelschen Gruppe aufzustellen, so ist damit auch die Aufgabe gelöst, alle i. Dgn. einer Abelschen Gruppe zu bestimmen:

XIV. *Um alle i. Dgn. einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ durch Kollineationen aufzustellen, suche man in $\mathfrak{A}$ alle diejenigen Faktorgruppen auf, die lauter paarweise einander gleiche Invarianten besitzen, und bestimme für jede derselben nach dem in diesem Paragraphen dargelegten Verfahren sämtliche getreue i. Dgn. durch Kollineationen* [27]).

Im Fall $n = 2$ sind alle diese Faktorgruppen von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{\{A_1^d, A_2^d\}}$ mit $d \mid a_2$. Man findet so als eine dem Charakter $\psi(C_{12}) = \varepsilon^{s_{12}}$ entsprechende i. Dg. von $\mathfrak{A}$ für $s_{12} = 1, 2, \ldots\ a_2 - 1$ [28]):

[26]) Daß (48) tatsächlich ein Automorphismus ist, rechnet man leicht nach.

[27]) Um die triviale Darstellung von $\mathfrak{A}$ nicht auszuschließen, muß man auch $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$ zu diesen Faktorgruppen rechnen, obwohl man dabei nicht gut von paarweise gleichen Invarianten sprechen kann.

[28]) Dem Fall $s_{12} = 0$ entspricht ja die triviale Darstellung.

$$(52)\qquad \left.\begin{aligned}(\mathrm{A}_1) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots x_d \\ \varepsilon^{-s_{12}} x_1 & \varepsilon^{-2s_{12}} x_2 & \varepsilon^{-3s_{12}} x_3 & \dots x_d \end{pmatrix} \\ (\mathrm{A}_2) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots x_{d-1} & x_d \\ x_2 & x_3 & x_4 \dots x_d & x_1 \end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad d = \frac{a_2}{(a_2, s_{12})}.$$

(52) ist eine getreue i. Dg. von $\dfrac{\mathfrak{A}}{\{A_1^d, A_2^d\}}$ mit $d = \dfrac{a_2}{(a_2, s_{12})}$; die Anzahl der verschiedenen i. Dgn. von einem bestimmten Grade $f \mid a_2$ beträgt demnach $\varphi(f)$. Hingegen findet man für die Anzahl l_ψ der einem Charakter $\psi(\mathrm{C}_{12}) = \varepsilon^{s_{12}}$ entsprechenden verschiedenen i. Dgn. von $\mathfrak{H}$ durch g. l. S. nach (39) $l_\psi = \dfrac{a_1}{a_2}(a_2, s_{12})^2$ und somit für die Anzahl von Klassen konjugierter Elemente in $\mathfrak{H}$:

$$(53)\qquad k = \sum_{\psi} l_\psi = \frac{a_1}{a_2} \sum_{s_{12}=0}^{a_2-1} (a_2, s_{12})^2 = \frac{a_1}{a_2} \sum_{\delta \mid a_2} \delta^2 \varphi\left(\frac{a_2}{\delta}\right)^{29}).$$

§ 6. $\mathfrak{A}$ vom Typus $(p, p, \dots, p)$.

Für den Fall, daß (54) $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = p$ (Primzahl) und (55) $n = 2l$ eine gerade Zahl ist, möge noch die Anzahl $Z(p, n, l)$ der *getreuen* i. Dgn. durch Kollineationen bestimmt werden. Bei einer getreuen i. Dg. muß $l_\psi = 1$ oder nach (41)

$$(56)\qquad (e_\nu, p) = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

sein, wo $e_1 = e_2, e_3 = e_4, \dots, e_{n-1} = e_n$ die Elementarteiler der Matrix $A = (-s_{\varkappa\lambda})$ sind; A muß also mod. p den Rang $n = 2l$ haben, wie man auch direkt den Kongruenzen (28) entnehmen kann. *$Z(p, n, l)$ ist infolgedessen gleich der Anzahl der mod. p verschiedenen alternierenden n-reihigen Matrizen mit nicht durch p teilbarer Determinante.*

Um $Z(p, n, l,)$ zu bestimmen, setzen wir

$$(57)\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & e_n \end{pmatrix};$$

dann ist $|\Delta| \not\equiv 0 \pmod{p}$ wegen (56), und die aus (46) hervorgehende Gleichung $A = \Omega' \Delta' N \Delta \Omega = (\Delta\Omega)' N (\Delta\Omega)$ lehrt, daß man jede alternierende Matrix A mit nicht durch p teilbarer Determinante in der Form

$$(58)\qquad A \equiv \Lambda' N \Lambda \pmod{p}$$

schreiben kann, wo Λ eine Matrix mit $|\Lambda| \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Alle mod. p verschiedenen alternierenden Matrizen mit nicht durch p teilbarer Determinante erhält man also in den verschiedenen unter den Matrizen $\Lambda' N \Lambda$, wenn man Λ die Gruppe $\mathfrak{L}_n$ aller g. l. S. mod. p in n Variablen mit nicht durch p teilbarer Determinante durchlaufen läßt, deren Ordnung [30])

---

[29]) Für $n > 2$ besteht eine so einfache Formel nicht mehr. — Wegen eines weiteren Beispiels sei auf die Arbeit von Herrn Schur: Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, dieses Journal Bd. **139** (1911), S. 155—250, verwiesen, wo in § 21 durch ein dem hier geschilderten ganz ähnliches Kompositionsverfahren für die Abelsche Gruppe der Ordnung 2^{2m} vom Typus $(2,2,\dots,2)$ die dem Charakter $\psi_{\mathrm{C}_{12}\mathrm{C}_{13}\cdots\mathrm{C}_{1n}\mathrm{C}_{23}\cdots\mathrm{C}_{n-1,n}}(\mathrm{C})$ entsprechende getreue i. Dg. durch Kollineationen des Grades 2^m gebildet wird.

[30]) Sp., S. 129.

$$l_n = p^{\frac{n(n-1)}{2}} (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \cdots (p - 1) \tag{59}$$

ist.

Die Untergruppe $\mathfrak{B}_n$ derjenigen Substitutionen aus $\mathfrak{L}_n$, die bei kogredienter Anwendung auf die Variablenreihen $x_1, x_2, \ldots, x_{2l}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{2l}$ die zur Matrix N gehörige Bilinearform

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + (x_{2l-1} y_{2l} - x_{2l} y_{2l-1})$$

mod. p invariant lassen, nennt man die spezielle lineare Abelsche Gruppe des $GF(p)$; ihre Ordnung ist [31])

$$b_n = p^{\frac{n^2}{4}} (p^2 - 1)(p^4 - 1) \cdots (p^{n-2} - 1)(p^n - 1). \tag{60}$$

Liefern nun zwei Substitutionen Λ_1 und Λ_2 dieselbe alternierende Matrix $\Lambda_1' N \Lambda_1 \equiv \Lambda_2' N \Lambda_2$ (mod. p), so ist $(\Lambda_1 \Lambda_2^{-1})' N (\Lambda_1 \Lambda_2^{-1}) \equiv N$ (mod. p), $\Lambda_1 \Lambda_2^{-1} < \mathfrak{B}_n$, Λ_1 und Λ_2 gehören derselben rechtsseitigen Nebengruppe von $\mathfrak{L}_n$ mod. $\mathfrak{B}_n$ an. $Z(p, n, l)$ ist daher gleich dem Index von $\mathfrak{B}_n$ unter $\mathfrak{L}_n$:

$$Z(p, n, l) = \frac{l_n}{b_n} = p^{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)} (p^{n-1} - 1)(p^{n-3} - 1) \cdots (p^3 - 1)(p - 1). \tag{61}$$

Aus (61) läßt sich für eine Abelsche Gruppe mit $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = p$ und mit beliebigem $n > 1$ die Anzahl $Z(p, n, \alpha)$ der verschiedenen i. Dgn. durch Kollineationen des Grades p^α berechnen. Wegen

$$Z(p, n, 0) = 1 \tag{62}$$

und XII. können wir uns auf $\alpha = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ beschränken. Nun ist nach IX. und (20) eine i. Dg. vom Grade p^α getreue i. Dg. einer Faktorgruppe von $\mathfrak{A}$, die die Ordnung $p^{2\alpha}$ hat. Die Anzahl der getreuen i. Dgn. einer solchen Faktorgruppe, die sich aus (61) ergibt, wenn man das dortige $n = 2l$ durch 2α ersetzt, ist nur noch, um $Z(p, n, \alpha)$ zu erhalten, mit der Anzahl der verschiedenen Faktorgruppen von der Ordnung $p^{2\alpha}$ in $\mathfrak{A}$ zu multiplizieren, also (Sp., Satz 51) mit

$$\frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \cdots (p^{n-2\alpha+1} - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1) \cdots (p^{2\alpha} - 1)};$$

so ergibt sich:

XV. *Die Anzahl der verschiedenen i. Dgn. durch Kollineationen des Grades p^α, die die Abelsche Gruppe vom Typus $(p, p, \ldots, p)$ mit der Ordnung p^n besitzt, beträgt* [32]):

$$Z(p, n, \alpha) = p^{\alpha(\alpha-1)} \frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \cdots (p^{n-2\alpha+1} - 1)}{(p^2 - 1)(p^4 - 1) \cdots (p^{2\alpha} - 1)} \tag{63}$$

$$\left(\alpha = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right];\quad n \geqq 2\right).$$

---

[31]) L. E. Dickson, Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory, Leipzig 1901, S. 94.

[32]) Da $\mathfrak{A}$ nach XI. im ganzen $p^{\binom{n}{2}}$ verschiedene i. Dgn. durch Kollineationen besitzt, ist wegen (62)

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} Z(p, n, \alpha) = p^{\binom{n}{2}} - 1.$$

Dies läßt vermuten, daß auch für eine beliebige Größe x die Gleichung

$$x^{\binom{n}{2}} - 1 = \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} x^{\alpha(\alpha-1)} \frac{(x^n - 1)(x^{n-1} - 1) \cdots (x^{n-2\alpha+1} - 1)}{(x^{2\alpha} - 1)(x^{2\alpha-2} - 1) \cdots (x^2 - 1)} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

gilt; tatsächlich besteht eine solche Identität, wie man z. B. durch vollständige Induktion beweisen kann.

§ 7. Die Darstellungsgruppen einer Abelschen Gruppe.

Alle Darstellungsgruppen der Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ vom Typus $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ erhält man nach dem von Herrn Schur für beliebige Gruppen angegebenen Verfahren (U., § 1, insbesondere S. 94 f.) in der Form $\mathfrak{H} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, wenn man wieder die Forderung stellt, daß die $\binom{n}{2}$ Elemente

$$C_{\varkappa\lambda} = A_\varkappa^{-1} A_\lambda^{-1} A_\varkappa A_\lambda \qquad (\varkappa < \lambda;\ \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

invariante Elemente von $\mathfrak{H}$ sein sollen, aber die bisherigen Ordnungsrelationen (9) durch die allgemeineren Bedingungen

$$A_\mu^{a_\mu} = \prod_{\varkappa<\lambda} C_{\varkappa\lambda}^{\alpha_{\varkappa\lambda\mu}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{64}$$

ersetzt, wobei jeder Exponent $\alpha_{\varkappa\lambda\mu}$ auf ein vollständiges Restsystem mod. (a_λ, a_μ) beschränkt werden darf.

Bemerkenswert ist, daß im Fall $n = 2$ die Darstellungsgruppe $\mathfrak{H}$ mit den Exponenten $\alpha_{121} = \alpha_{122} = 1$ eine abgeschlossene Gruppe ist. Da nämlich in diesem Falle

$$C_{12} = A_1^{a_1} = A_2^{a_2} \tag{65}$$

ist, so gilt in einer Darstellungsgruppe $\mathfrak{L} = \{\bar{A}_1, \bar{A}_2\}$ von $\mathfrak{H}$ für die entsprechenden, durch Überstreichung bezeichneten Elemente: $\bar{C}_{12} = M_1 \bar{A}_1^{a_1} = M_2 \bar{A}_2^{a_2}$, wo M_1 und M_2 als Elemente des Multiplikators $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ invariante Elemente sind. Daher ist $\bar{C}_{12}$ mit $\bar{A}_1$ und $\bar{A}_2$ vertauschbar, also invariantes Element von $\mathfrak{L}$, und folglich besteht der Kommutator $\mathfrak{L}^* = \{\mathfrak{M}, \bar{C}_{12}\}$ aus lauter invarianten Elementen. Aus $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}^*} \sim \mathfrak{A}$ folgt dann, daß $\mathfrak{L}$ eine durch die Gruppe $\mathfrak{L}^*$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{A}$ ist; die Ordnung einer Gruppe mit dieser Eigenschaft kann aber nicht größer als die von $\mathfrak{H}$ sein (D., S. 47).

Da hier (65) zur Definition von $\mathfrak{H}$ genügt — daß C_{12} invariantes Element ist, folgt daraus von selber —, ist also bewiesen, wenn man noch $a_1 = uv$, $a_2 = v$ setzt:

XVI. *Durch* $A^{uv} = B^v = A^{-1} B^{-1} AB$ *ist eine abgeschlossene (und nicht zyklische) Gruppe der Ordnung* uv^3 *definiert.* $(u = 1, 2, \ldots; v = 2, 3, \ldots)$

Für $u = 1$, $v = 2$ z. B. ergibt sich die Quaternionengruppe. Wählt man $u = p^{\mu-2\nu}$, $v = p^\nu$, wo $\mu \geqq 2\nu$, wenn p eine von 2 verschiedene Primzahl, und $\mu > 2\nu$ bei $p = 2$ sein soll, so erhält man eine abgeschlossene Gruppe der Ordnung $p^{\mu+\nu}$, die mit der von Herrn Schur in U., S. 108 Anm. angegebenen isomorph ist. Um auf die dortige Definition zu kommen, hat man nur $A = P$ und $A^{-p^{\mu-2\nu}} \cdot B = Q$ zu setzen, wie man durch eine leichte Rechnung bestätigen kann.

Im allgemeinen haben jedoch die Darstellungsgruppen einer Abelschen Gruppe einen von E verschiedenen Multiplikator, dessen genaue Ordnung schwierig zu bestimmen ist. Hier soll nur noch folgender Satz bewiesen werden:

XVII. *Die Darstellungsgruppen einer Darstellungsgruppe einer Abelschen Gruppe sind wieder metabelsche Gruppen.*

Ist nämlich $\mathfrak{L}$ eine Darstellungsgruppe und $\mathfrak{M}$ der Multiplikator einer Darstellungsgruppe $\mathfrak{H}$, so folgt aus $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{M}} \sim \mathfrak{H}$ wegen $\mathfrak{M} < \mathfrak{L}^*$ auch $\frac{\mathfrak{L}^*}{\mathfrak{M}} \sim \mathfrak{H}^*$; also da für jedes Element $C < \mathfrak{H}^*$ und für jedes Element $A < \mathfrak{H}$ $CAC^{-1}A^{-1} = E$ ist, ist entsprechend für jedes Element $\bar{C} < \mathfrak{L}^*$ und $\bar{A} < \mathfrak{L}$, $\bar{C}\bar{A}\bar{C}^{-1}\bar{A}^{-1} = M_{\bar{A}}$ ein Element aus $\mathfrak{M}$. Aus $\bar{C}\bar{A}\bar{C}^{-1} = M_{\bar{A}}\bar{A}$ und $\bar{C}\bar{B}\bar{C}^{-1} = M_{\bar{B}}\bar{B}$ folgt aber durch Multiplikation $M_{\bar{A}\cdot\bar{B}} = M_{\bar{A}} \cdot M_{\bar{B}}$, also $M_{\bar{A}\bar{B}\bar{A}^{-1}\bar{B}^{-1}} = \bar{E}$ und überhaupt $M_{\bar{D}} = \bar{E}$ für $\bar{D} < \mathfrak{L}^*$. Damit ist aber $\bar{C}\bar{D}\bar{C}^{-1}\bar{D}^{-1} = \bar{E}$ für irgend zwei Elemente $\bar{C}$ und $\bar{D}$ aus $\mathfrak{L}^*$ bewiesen.

Eingegangen 14. März 1930.

Lebenslauf.

Geboren bin ich am 9. August 1906 in Brünn (Mähren) als Sohn des Redakteurs Dr. Rudolf Frucht. Im Jahre 1908 übersiedelte ich nach Berlin, wo ich von 1912 ab das Askanische Gymnasium besuchte. Nach Ablegung der Reifeprüfung zu Michaelis 1924 studierte ich an der philosophischen Fakultät der Berliner Friedrich-Wilhelms-Universität Mathematik, Physik und Philosophie, und zwar hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren: Bieberbach, Feigl, H. Hopf, Köhler, Löwner, von Mises, Nernst, Planck, Pringsheim, Rupp, E. Schmidt, Schlenk, Schrödinger, Schur, Spranger, Wehnelt und Wertheimer. Besonderen Dank schulde ich den Herren Prof. Bieberbach, Prof. v. Mises, Prof. Schmidt und nicht zuletzt Herrn Prof. Schur, durch dessen wertvolle Ratschläge diese Arbeit sehr gefördert wurde.